

## LA RAZÓN Y LA PROPORCIÓN COMO ELEMENTOS DE TRANSICIÓN HACIA EL ÁLGEBRA ELEMENTAL



Norma Patricia Rodríguez Linaldi, Juan de Dios Viramontes Miranda  
patylinaldi@gmail.com, jddviramontes@gmail.com  
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez  
Avance de Investigación  
Básico

### Resumen

El objetivo de esta investigación es llevar a cabo un estudio de aspecto didáctico para encontrar elementos sustanciales encuadrados en las nociones de razón y proporción que influyan de manera directa en la transición hacia el álgebra elemental en alumnos de secundaria, tomando como marco de referencia la teoría cultural de la objetivación. Se utilizará el método cualitativo de recolección de datos trabajando en tres fases, utilizando una muestra de 12 estudiantes de primer grado pertenecientes a una secundaria pública federal, con el fin de analizar elementos y herramientas adquiridas de forma deficiente, equívoca o nula sobre las ya mencionadas nociones, de tal forma que permita revelar si esta situación es un obstáculo en la transición para arribar con éxito al pensamiento algebraico.

**Palabras clave:** *Transición, Álgebra, razón, proporción, objetivación*

### 1. Introducción

El problema generalizado de la enseñanza-aprendizaje del álgebra en la etapa de la transición de la aritmética hacia el álgebra elemental, se da en el nivel secundaria. Existe una brecha cognitiva (Herscovics y Linchevski, 1994) la cual necesita un puente para lograr que dicha transición se lleve a cabo de forma favorable. Es indispensable proporcionar herramientas y elementos que faciliten tanto al estudiante como al profesor, arribar de manera efectiva al pensamiento algebraico, y que esto permita a su vez acceder al pensamiento algebraico avanzado.

A través de la historia de las matemáticas, se encuentra evidencia científica y práctica de la existencia de problemas y obstáculos que se presentan en la transición de la aritmética al álgebra elemental en los estudiantes que pasan de primaria a secundaria, etapa en la cual se desarrolla el pensamiento algebraico temprano y en donde su contexto matemático anterior ha sido por excelencia el aritmético y en parte el geométrico.

Existe una gran cantidad de investigaciones en torno a fenómenos didácticos que tienen que ver con la transición de la aritmética al álgebra ya que es una etapa decisiva en la historia escolar del estudiante, esto deja ver la importancia de estudiar dicho fenómeno con la finalidad de ofrecer mejores herramientas y elementos que optimicen y hagan más eficiente la enseñanza-aprendizaje del álgebra, de tal manera que se genere un puente sólido que acorte la brecha en dicha transición.

Es por ello que esta investigación centra su estudio en el aspecto didáctico de las nociones de razón y proporción considerando la abundancia de elementos sustanciales inmersos en ellas que influyen de manera directa en la transición hacia el álgebra elemental en alumnos de secundaria.

Existen diferentes puntos de vista al abordar dicho fenómeno didáctico, lo cierto es que todos coinciden en que existen elementos que obstaculizan esta transición y dificultan tanto a maestros como a estudiantes lograr con éxito la enseñanza y el aprendizaje del álgebra elemental.

Investigaciones hechas en torno a esta problemática abordan este fenómeno didáctico desde varias perspectivas considerándose entre ellas: la perspectiva didáctica, la epistemológica, la cognitiva y desde el contexto social y cultural en el que se encuentran inmersos todos los elementos implicados.

Por otro lado, considerando en la historia la noción de álgebra que se tenía en el ámbito escolar sumergido a su vez en un contexto socio-cultural determinado por la época del siglo XIX, Peacock (1830) manifestó que el álgebra siempre había sido considerada como mera modificación de la aritmética, en la cual se usaba el lenguaje simbólico y las operaciones de una eran transferidas a la otra sin ninguna indicación de su significado y aplicación; de igual manera, los símbolos utilizados en álgebra eran vistos como generalizaciones y como representativos de una cantidad cualquiera, ciertamente en nuestros días aún persiste en algunas personas de nuestro país este pensamiento.

En este estudio, debido a que nuestra perspectiva teórica es socio-cultural, utilizaremos el método cualitativo de recolección de datos. Los elementos clave de la teoría cultural de la objetivación que se manejan en esta investigación son: *la mediación semiótica, la actividad y el trabajo en grupos*.

Preguntas base para la investigación:

- i. ¿Qué elementos de razón y proporción son generadores de significados que faciliten la transición hacia el álgebra elemental?
- ii. ¿Qué elementos caracterizan la transición del aritmética al álgebra?
- iii. ¿Qué noción de razón y proporción tienen los estudiantes de primer grado de secundaria?

## 2. Marco teórico

Esta investigación tiene como marco teórico de referencia la Teoría Cultural de la Objetivación propuesta por Luis Radford en el año 2006 quien la presenta como una teoría de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, inspirada en las escuelas antropológicas e histórico-culturales del conocimiento. Esta teoría se apoya en una concepción antropológica del pensamiento y en una concepción esencialmente social del aprendizaje. Geertz (1973) afirma que el cerebro opera con los elementos y objetos que obtiene del contexto cultural y los mismos recursos obtenidos constituyen la actividad mental; sin el ser humano no existiría la cultura y sin la cultura no sería el ser propiamente humano.

La teoría cultural de la objetivación, lejos de basarse en la mera actividad mental aislada para definir lo que es el pensamiento, lo hace a partir de una práctica social, es decir, considera el pensamiento como “una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos” (Radford, 2006, p.107). Propone utilizar siempre la mediación semiótica que es el rol que juegan los artefactos en la realización de la práctica social (Vygotsky, 1981). Estos artefactos son generalizaciones de objetos, instrumentos, sistemas de signos, todo lo que pueda considerarse como un artefacto, es válido para esta mediación.

Por otro lado, el pensamiento se da con los artefactos y por medio de ellos, siendo estos potenciadores del aprendizaje, el pensamiento no sólo se da en el cerebro, sino que también ocurre en el plano social, a esto se le llama “el territorio del artefacto” (Radford, 2006, p.107), es

la dimensión en la cual el artefacto tiene forma de existir y en esta dimensión se da cierto diseño de situaciones que involucran al artefacto a través de los cuales el estudiante va a generar y a materializar pensamientos en un movimiento dialéctico, es decir, de forma reflexiva (Radford, 2006).

Esta teoría considera que el pensamiento tiene una dimensión antropológica y afirma que “la manera en que llegamos a pensar y conocer los objetos del saber está enmarcada por significados culturales que van más allá del contenido mismo de la actividad en cuyo interior ocurre el acto de pensar” (Radford, 2006, p.108). A través de los sentidos se tiene contacto con los artefactos u objetos del saber y esto genera que se active el pensamiento, los que se dan de acuerdo al contexto cultural en el que se desenvuelve el individuo. La diferencia entre el pensamiento de diferentes países y el pensamiento de tiempos o épocas, tiene que ver entre otras cosas, con las actividades que se encuentran impregnadas por simbolismos culturales, generando una superestructura simbólica llamada por Radford (2003, p.109) “Sistemas semióticos de significación cultural”.

A lo largo de la historia, el individuo tiene relación con la actividad matemática de tal forma que genera los objetos matemáticos propios a su contexto cultural. “Los objetos matemáticos son patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos” (Radford, 2006, p.111). Además, se han ido sumando formas de expresar un objeto matemático. Por otro lado se puede ver que la noción fundamental del significado del objeto tiene su origen en la actividad del individuo en donde se involucran varios aspectos de su cultura, o pueden ser varias culturas mezcladas.

Tomando en cuenta lo anterior y desde la perspectiva de la teoría de la objetivación, el aprendizaje consiste en “dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura” (Radford, 2006, p.113), esto es a lo que se llama objetivación cultural del saber, en otras palabras, el proceso de objetivación es la elaboración activa de significados con el fin de adquirir conocimientos. Se consideran dos fuentes importantes de elaboración de significados que sustentan la adquisición del saber: el saber depositado en los artefactos y la interacción social.

Al contacto con el artefacto, el individuo modifica su actividad y desarrolla capacidades humanas nuevas, tanto motrices como intelectuales como en el caso de la anticipación, la memoria y la percepción (Vygotsky y Luria 1994). Por ello, el territorio del artefacto se considera una fuente importante en la adquisición del saber, sin embargo el objeto en sí mismo no revela la inteligencia histórica inmersa en él; necesita ser manipulado por medio de actividades y la interacción social con personas que sepan interpretar y comunicar esa inteligencia para poder adquirirla.

Entonces, el elemento esencial que da sentido y significación a la actividad, según Leontiev (1993), es el objetivo de la misma que consiste en la reflexión que el estudiante elabora de la relación que se da en común y de forma activa con su realidad histórica y cultural.

Dicho de otro modo, aprender a hacer matemáticas no es lo mismo que aprender a ser en matemáticas, siendo esto último de mayor peso ya que hacer matemáticas es sólo un medio para el aprendizaje de ser en matemáticas. Un elemento importante para ello como ya se había mencionado, es la reflexión y la teoría de la objetivación afirma que esta se da a través de la acción y que los objetos matemáticos sólo pueden ser percibidos por medio del pensamiento. Por

lo anterior es indispensable conocer los objetos y productos del desarrollo cultural, para ello es ineludible llevar a cabo actividades que los involucren y que revelen su esencia (Leontiev, 1968). Entonces considerando lo anterior, podemos ver que la evolución del saber está depositado en la cultura.

En la misma tónica, la objetivación del saber se da a través de un proceso social siendo la sociabilidad un proceso de toma de conciencia común, generándose así el saber común o saber con otros.

Radford(2006) afirma que para la teoría cultural de la objetivación es de gran relevancia aprender a vivir en comunidad, que en este caso es el salón de clases; es necesario aprender a convivir y a compartir con otros, se debe abrir la mente a la comprensión de otras ideas y saberes, es decir, a ser con otros; y apoyando lo anterior, Todorov(1984) sostiene que se deben construir vínculos y relaciones ya que lo social no involucra sólo la presencia de un grupo de personas en un lugar independientemente de la cantidad, sino que es necesario compartir objetivos, involucrarse en las actividades del grupo y mantener una comunicación con los demás individuos.

Por ello, en esta investigación se plantea como primera fase, trabajar en pequeños grupos con el propósito de que los alumnos se apoyen mutuamente en la búsqueda de la solución de los problemas que se les proporcionan. Las diferencias individuales de sus miembros, enriquecen el trabajo de cada uno y lo retroalimentan incluyendo a aquellos que no tienen mucho que aportar, debido a que al estar en contacto con otros estudiantes y con sus opiniones e ideas, también se ve involucrado en las acciones para concluir el trabajo solicitado y es muy probable que colabore de alguna forma con su grupo.

Como segunda fase se propone el intercambio entre pequeños grupos en donde comparten las reflexiones producidas por los mismos. “Un grupo puede intercambiar sus soluciones con otro grupo, con el fin de entender otros puntos de vista y mejorar los propios” (Radford, 2006, p.121).

La tercera y última fase consiste en llevar a cabo una discusión general del grupo, es en donde se pueden intercambiar y discutir las ideas, teniendo todos los miembros la misma oportunidad de participar. Este es otro momento que puede utilizar el profesor para lanzar la discusión en puntos medulares que necesitan de mayor profundidad de acuerdo con los programas escolares.

Como síntesis de esta teoría, Radford (2006, p.123) afirma que “la teoría de la objetivación propone una didáctica anclada en principios en los que el aprendizaje es visto en tanto que actividad social (praxis cogitans) arraigada en una tradición cultural que la antecede”.

Los pilares en los que se sostiene la teoría de la objetivación, están estructurados en torno a los siguientes conceptos interrelacionados : el concepto del pensamiento, el concepto de aprendizaje, los sistemas semióticos de significación cultural, el concepto de objeto matemático y la objetivación que es el proceso a través del cual se da el aprendizaje. Además en esta teoría, el concepto de individuo se aborda desde una perspectiva diferente a la tradicional (que se basa en el concepto de autonomía y libertad) , considerando al individuo como tal en tanto que es ser con otros.

### 3. La razón y la proporción en la transición de la aritmética al álgebra desde la matemática educativa

A través de la historia de la matemática educativa, se encuentra evidencia científica y práctica de la existencia de problemas y obstáculos que se presentan en la transición de la aritmética al álgebra elemental en los estudiantes que pasan de primaria a secundaria, etapa en la cual se desarrolla el pensamiento algebraico temprano y en donde su contexto matemático anterior ha sido por excelencia el aritmético y en parte el geométrico.

Existe una gran cantidad de investigaciones en torno a este fenómeno didáctico, que han sido difundidas a través de artículos de matemática educativa y reportes de investigación a nivel internacional. Esto deja ver la importancia de analizar dicho problema que se presenta de manera recurrente cuando los estudiantes incursionan al mundo del álgebra, ya que se trata de una etapa decisiva en la historia escolar del estudiante en donde se deben ofrecer mejores herramientas y elementos para optimizar y hacer más eficiente la enseñanza-aprendizaje del álgebra, de tal manera que se genere un puente sólido en esa transición.

Se observan en el aula, situaciones en donde el avance en la construcción de significados algebraicos se dificulta o se trunca, debido al estancamiento provocado por significados y nociones previamente concebidos por los estudiantes de forma diferente en disciplinas fuera del álgebra como lo son: la noción del uso de literales y símbolos, el pensamiento multiplicativo, la percepción de patrones y la noción del uso del signo igual.

El manejo del álgebra elemental es básico para acceder a ideas más complejas dentro de las matemáticas escolares y que sin ello el aprendizaje de otras disciplinas que tengan que ver con: modelar, generalizar y realizar movimientos u operaciones algebraicas, será deficiente o nulo. Investigadores como Kieran y Filloy (1989), Butto y Rojano (2004, 2009), Herscovics y Linchevski (1994) y Filloy, Puig y Rojano (2008), consideran el álgebra como una puerta o conducto a la adquisición de matemáticas de orden superior, de allí la importancia de desarrollar un pensamiento algebraico elemental sólido para después llegar a un pensamiento algebraico avanzado que nos permita incursionar con éxito en otras disciplinas matemáticas como el cálculo, ecuaciones diferenciales e incluso en estadística, indispensables en infinidad de profesiones y en otras áreas que también las requieren.

Las nociones de razón y proporción han estado presentes a lo largo de la historia de las matemáticas y en estas nociones encontramos el uso de símbolos, literales y del signo igual, así como el pensamiento multiplicativo, la percepción de relación y la percepción de patrones por ello, esta investigación se enfoca en dichas nociones ya que ofrecen una riqueza de elementos trascendentales presentes en el proceso de transición hacia el álgebra como los que se mencionan. Se considera evaluar el impacto que provoca la intervención de estos elementos en la transición de la aritmética al álgebra, y analizar en qué medida permiten librar los obstáculos que puedan presentarse actualmente en el camino de la enseñanza-aprendizaje del álgebra.

Considerando que la razón y la proporción son las nociones centrales que nos ocupan, se muestra aquí una breve definición matemática de razón: es el resultado de comparar dos cantidades relacionadas entre sí (Katz, 1998). La razón geométrica se puede expresar como fracción con sus respectivos elementos  $\frac{a}{b}$  ó con el signo de división  $a \div b$ , así como también con el signo de dos puntos entre las dos cantidades  $a:b$ . Y una breve definición de proporción: es la igualdad de dos

razones de una misma clase y que tienen el mismo valor. Se expresa de la siguiente forma:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ó  $a : b = c : d$ , y se lee **a** es a **b** como **c** es a **d**. (Euclid, 1956)

En las definiciones anteriores puede verse la intervención de los elementos antes mencionados y que son objeto de estudio en esta investigación.

#### 4. Metodología

Debido a que nuestra perspectiva teórica es socio-cultural, utilizaremos el método cualitativo de recolección de datos. Los elementos clave de la teoría de la objetivación que se manejan en esta investigación son: la mediación semiótica, la actividad y el trabajo en grupos. La investigación se llevará a cabo con alumnos de primer grado de secundaria de una escuela pública federal ubicada en zona céntrica de Cd. Juárez, Chihuahua, a la cual acuden estudiantes de nivel socioeconómico medio-bajo, siendo en su mayoría hijos de matrimonios en los que trabajan ambos padres. Se tomará una muestra de 12 alumnos con un nivel de aprovechamiento medio en la materia de matemáticas (debe entenderse por aprovechamiento medio que el alumno tenga un promedio académico entre 7 y 9 en escala del 1 al 10, en el grado inmediato inferior, es decir en sexto grado de primaria) siendo los maestros de matemáticas quienes seleccionen 2 alumnos por grupo de los 6 de primer grado que existen, según su criterio.

El motivo principal de seleccionar alumnos con ese promedio, es analizar la carencia de elementos y herramientas que se relacionen con razón y proporción existente en los estudiantes, es decir, analizar qué elementos y herramientas adquirieron de forma equivocada, nula o deficiente sobre estas nociones y determinar si está siendo un obstáculo (en la transición) para arribar al pensamiento algebraico. Aludiendo al trabajo con grupos de la teoría de la objetivación, se trabajará con grupos que no excedan de 3 miembros ya que esa es la sugerencia de investigadores como Radford (2006, p.119) para obtener mejores resultados en las actividades didácticas que se aplicarán.

Se generarán actividades de aprendizaje con el objetivo de revelar evidencias que permitan evaluar si las nociones de razón y proporción son generadoras de elementos básicos para construir un puente que facilite al estudiante su transición hacia el álgebra elemental. Como ya se había mencionado con anterioridad, los elementos básicos a considerar serán : pensamiento multiplicativo, uso de literales y símbolos, percepción de patrones y noción del signo igual como equivalencia.

El trabajo se llevará a cabo con el grupo en 8 sesiones de 1 hora, 2 días a la semana durante 4 semanas, en las que considerando la mediación semiótica (elemento clave en la teoría de la objetivación) se utilizará la técnica de lápiz y papel, así como la tecnología por medio del software de geometría dinámica GeoGebra y manipulables. Se decidió seleccionar el software GeoGebra por las ventajas que ofrece de acceso y manejabilidad para la actividad a realizar.

El procedimiento que se utilizará para trabajar con las actividades de aprendizaje se dividirá en 3 fases: a) análisis de las nociones de razón y proporción de forma general mediante la aplicación de un cuestionario inicial de sondeo; b) implementación de actividades de aprendizaje para trabajar con elementos de las nociones de razón y proporción con técnicas de lápiz y papel, manipulables y software de geometría dinámica; y c) analizar si los elementos tomados de la noción de razón y proporción en las actividades didácticas, realmente general elementos y



herramientas que faciliten el desarrollo del pensamiento algebraico aplicando un cuestionario final y entrevistas.

Las técnicas de recolección de datos son: Cuestionario inicial de sondeo; observación del investigador tomando notas de campo, fotos y video en las diferentes sesiones; análisis de las actividades de aprendizaje, aplicación de cuestionario final y la entrevista.

Para la interpretación de los datos, se elaborará una codificación de los mismos que facilite agrupar y visualizar los resultados de forma más factible. Esto lo utilizaremos para analizar las notas de campo, las entrevistas, así como las actividades de aprendizaje.

## 5. A modo de conclusión

Considerando que las nociones de razón y proporción contienen elementos de carácter algebraico y además enmarcan una serie de nociones básicas, se lleva a cabo este estudio de aspecto didáctico en el cual se han encontrado elementos sustanciales encuadrados en las nociones de razón y proporción que influyen de manera directa en la transición hacia el álgebra elemental en alumnos de primero de secundaria como lo son: el uso de literales y símbolos, pensamiento multiplicativo, percepción de patrones, percepción de dependencia y el uso del signo igual, respaldando lo anterior con artículos de investigaciones previas.

La metodología de este estudio se entrelaza con los pilares en los que se sostiene la teoría de la objetivación y que están estructurados en torno a los siguientes conceptos interrelacionados entre sí: el concepto del pensamiento, el concepto de aprendizaje, los sistemas semióticos de significación cultural, el concepto de objeto matemático y la objetivación que es el proceso a través del cual se da el aprendizaje. Además el concepto de individuo se aborda desde una perspectiva diferente a la tradicional, considerando al individuo como tal en tanto que es ser con otros.

## 6. Referencias

- Butto Zarzar, C. y Rojano Ceballos, T. (2004). Introducción al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, 16(1), 113-148.
- Butto Zarzar, C. y Rojano Ceballos, T. (2009, septiembre). *Pensamiento algebraico temprano*. Presentado en X Congreso Nacional de Investigación Educativa. Veracruz, Veracruz, México.
- Euclid. (1956). *The thirteen books of the Elements*. New York, N.Y.: Dover Publications.
- Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 26(3).
- Filloy, E. y Rojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraic thought (A clinical study with 12-13 year olds). *Psychology of Mathematics Education - North American Chapter*, Winsconsin University, EE.UU. pp. 51-56.
- Geertz, C. (1973). *The Interpretation of Cultures*. New York: Basic Books.
- Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78.
- Katz, V. (1998). *A History of Mathematics: an introduction*. U.S.A.: Addison Wesley Longman.
- Kieran, C y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias*, 7(3), 229-240.

- Leontiev, A. N. (1968). El hombre y la cultura. En *El hombre y la cultura: problemas teóricos sobre educación* (pp. 9-48). México: Editorial Grijalbo.
- Leontiev, A. N. (1993). *Actividad, conciencia y personalidad*. México: ASBE Editorial.
- Peacock, G. (1830). *A treatise on algebra*. London: J.&J.J.Deighton.
- Radford, L. (2003). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger and V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49-79). Ottawa: Legas Publishing.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número Especial*, 103-129.
- Todorov, T. (1984). *Mikhail Bakhtin: The Dialogical Principle*. Minneapolis, London: University of Minnesota Press.
- Vygotsky, L. S. (1981). The instrumental method in psychology. En J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 135-143). Armonk, N. Y.: Sharpe.
- Vygotsky, L. S. y A. Luria (1994). Tool and symbol in child development. En R. van der Veer y J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky Reader* (pp. 99-174). Oxford: Blackwell.